Diferencijalne jednačine

December 9, 2020

Uvod

Jednačina u kojoj figuriše nezavisna promenljiva x, funkcija y i njeni izvodi $y', y'', ..., y^{(n)}$ naziva se **diferencijalna jednačina**, $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Zadatak je da se odredi nepoznata funkcija y, tj. **rešenje diferencijalne jednačine** je funkcija $y = f(x)$ koja zadovoljava polaznu jednačinu za svako x.

Najviši red izvoda n u jednačini je **red diferencijalne jednačine**.

Jednačine u kojima figuriše funkcija jedne nezavisne promenljive $y = f(x)$ i njeni izvodi naziva se **obična DJ**.
Jednačine u kojima figuriše funkcija više promenljivih $y = f(x_1, ..., x_n)$ i njeni parcijalni izvodi naziva se **parcijalna DJ**.

Diferencijalne jednačine prvog reda

Diferencijalna jednačina prvog reda $F(x, y, y') = 0$.

Pretpostavimo da se jednačina može zapisati u obliku $y' = f(x, y)$.

Postavljaju se 2 pitanja:

1. Da li postoji rešenje jednačine?
2. Ako postoji rešenje, da li je jedinstveno?

Teorema

Neka je data jednačina $y' = f(x, y)$ pri čemu je $f(x, y)$ definisana i neprekidna u oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$. Za proizvoljnu tačku $(x_0, y_0) \in D$ postoji jedinstveno rešenje $y = \varphi(x)$ jednačine koje zadovoljava uslov $y = y_0$ za $x = x_0$, tj. $y(x_0) = y_0$.

Jednačina $y' = f(x, y)$ ima beskonačno mnogo rešenja.
Uslov $y(x_0) = y_0$ naziva se **početni uslov**.
Oznake: $y(x_0) = y_0$, $y|_{x=x_0} = y_0$

Definicija

Opšte rešenje DJ *$F(x, y, y') = 0$ je familija funkcija $y = \varphi(x, C)$ koje zavise od proizvoljne konstante C i koje zadovoljavaju jednačinu $F(x, y, y') = 0$ za svako x.*

Za dati početni uslov $y|_{x=x_0} = y_0$ postoji konstanta $C = C_0$ takva da $y = \varphi(x, C_0)$ zadovoljava polaznu jednačinu. Svako rešenje $y = \varphi(x, C_0)$ polazne jednačine dobijeno iz opšteg rešenja tako što se parametru C dodeljuje konkretna vrednost C_0 naziva se ***partikularno rešenje DJ****.*

DJ sa razdvojenim promenljivim

DJ sa razdvojenim promenljivim *je oblika* $f(x)dx + g(y)dy = 0$*, gde su* f *i* g *neprekidne funkcije.*

Oznake: $y' = \frac{dy}{dx}$, $g(y)dy = -f(x)dx$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{f(x)}{g(y)}$...

$g(y)dy = -f(x)dx$ - može se posmatrati kao jednakost dva diferencijala. Tada se njihove primitivne funkcije razlikuju za konstantu:
$\int g(y)dy = -\int f(x)dx + C$.

Homogena DJ

Definicija

*Funkcija $f(x,y)$ se naziva **homogenom funkcijom** ako za svako $k \in \mathbb{R}$ važi $f(kx,ky) = f(x,y)$.*

Definicija

*DJ $y' = f(x,y)$ je **homogena DJ** ako je $f(x,y)$ homogena funkcija.*

Ako u $f(x,y) = f(kx,ky)$ izaberemo $k = \frac{1}{x}$
$\Rightarrow y' = f(x,y) = f(kx,ky) = f(1,\frac{y}{x}) \equiv g(\frac{y}{x})$
$\Rightarrow y' = g(\frac{y}{x})$.

Uvedimo smenu $u = \frac{y}{x}$.

$y' = g(\frac{y}{x}), u = \frac{y}{x}$

$$\begin{aligned} u = \frac{y}{x} &\Rightarrow y = u \cdot x \\ &\Rightarrow y'_x = u'_x \cdot x + u \cdot 1 \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u \\ &\Rightarrow g(u) = \frac{du}{dx} \cdot x + u \\ &\Rightarrow \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Dobijena je DJ sa razvojenim promenljivim po u
$\Rightarrow \int \frac{du}{g(u)-u} = \int \frac{dx}{x} + C$.

Vraćanjem smene $u = \frac{y}{x}$ dobija se opšte rešenje polazne jednačine.

Linearna DJ prvog reda

$y' + P(x)y = Q(x)$
gde su $P(x)$ *i* $Q(x)$ *neprekidne funkcije.*

Rešenje tražimo u obliku $y = u \cdot v$ gde su $u(x)$ i $v(x)$ funkcije po x. Pri tom, $v(x)$ biramo na pogodan način, a $u(x)$ na osnovu polazne jednačine.

$$\begin{aligned} y = u \cdot v \Rightarrow y' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u \end{aligned}$$

Zamenimo u polaznu jednačinu:

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \Rightarrow \quad \overbrace{\frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u}^{y'} + P(x) \cdot \overbrace{u \cdot v}^{y} = Q(x)$$

$$y' + P(x)y = Q(x) \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot \underline{u} + P(x) \cdot \underline{u} \cdot v = Q(x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v)} \cdot u + \frac{du}{dx} \cdot v = Q(x) \qquad (\heartsuit)$$

Izaberemo $v(x)$ tako da $(\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v) = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v = 0 &\Rightarrow \frac{dv}{dx} = -P(x) \cdot v \\
&\Rightarrow \frac{dv}{v} = -P(x) \cdot dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int P(x) \cdot dx \\
&\Rightarrow \ln|v| = -\int P(x) \cdot dx \\
&\Rightarrow v = e^{-\int P(x) \cdot dx}
\end{aligned}$$

Vratimo se u (♡):

$$\underbrace{(\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v)}_{0} \cdot u + \tfrac{du}{dx} \cdot v = Q(x)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 \cdot u + \frac{du}{dx} \cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \\
&\Rightarrow du = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx \\
&\Rightarrow \int du = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C \\
&\Rightarrow u = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C
\end{aligned}$$

Vratimo smenu $y = u \cdot v,\ v = e^{-\int P(x)dx}$ i dobijamo opšte rešenje linearne DJ prvog reda:

$$\Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx}(\textstyle\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C)$$

Bernulijeva DJ

$y' + P(x) \cdot y = y^n \cdot Q(x)$
gde su $P(x)$ *i* $Q(x)$ *neprekidne funkcije i* $n \in \mathbb{R},\ n \neq 0, 1$

Za $n = 0, 1$ to je linearna DJ.

$$y' + P(x) \cdot y = y^n \cdot Q(x) \qquad\qquad / : y^n$$
$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x) \qquad\qquad (\clubsuit)$$

Uvedemo smenu:

$$z = y^{1-n} \;\Rightarrow\; z' = \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{1-n-1}y' = (1-n)\underbrace{y^{-n}y'}$$
$$\Rightarrow y^{-n}y' = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{1}{1-n}$$

Zamenimo ovo u $(\clubsuit)$:

$$\underbrace{y^{-n}y'}_{} + P(x)\underbrace{y^{1-n}}_{z} = Q(x) \qquad (\clubsuit)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} \cdot \frac{1}{1-n} + P(x)z = Q(x) \qquad / \cdot (1-n)$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} + \underbrace{(1-n)P(x)}_{p(x)} z = \underbrace{(1-n)Q(x)}_{q(x)} \rightarrow \text{linearna DJ po } z$$

$$\Rightarrow z = e^{-\int (1-n)P(x)dx}\left(\int (1-n)Q(x) \cdot e^{\int (1-n)P(x)dx} \cdot dx + C\right)$$

Vratimo smenu $z = y^{1-n}$ i dobijamo opšte rešenje:

$$\Rightarrow y^{1-n} = e^{(n-1)\int P(x)dx}\Big((1-n)\int Q(x) \cdot e^{(1-n)\int P(x)dx} \cdot dx + C\Big)$$

Rikatijeva DJ

$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$
gde su $P(x), Q(x), R(x)$ *neprekidne funkcije.*

Ako je $R(x) = 0$ onda je Bernulijeva.

U opštem slucaju se ne integriše. Razmatramo samo dva slučaja ukoliko je poznato jedno partikularno rešenje y_1.

- Uvođenjem smene $y = y_1 + \frac{1}{z}$ svodi se na linearnu.
- Uvođenjem smene $y = y_1 + z$ svodi se na Bernulijevu.

Svođenje Rikatijeve na linearnu DJ:

Uvodimo smenu $y = y_1 + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad y' = y_1' - \frac{1}{z^2} z'$

Zamenimo y i y' u polaznu jednačinu $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$:

$$y_1' - \frac{1}{z^2} z' = P(x)(y_1 + \frac{1}{z})^2 + Q(x)(y_1 + \frac{1}{z}) + R(x)$$
$$y_1' - \frac{1}{z^2} z' = (P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)) + \frac{2P(x)y_1}{z} + \frac{P(x)}{z^2} + \frac{Q(x)}{z}$$

Pošto je y_1 rešenje jednačine $\Rightarrow y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)$.

$$-\frac{1}{z^2} z' = \frac{2P(x)y_1}{z} + \frac{P(x)}{z^2} + \frac{Q(x)}{z} \qquad / \cdot z^2$$
$$-z' = 2P(x)y_1 z + P(x) + Q(x)z$$

$z' + (2P(x)y_1 + Q(x))z = -P(x) \rightarrow$ Ovo je linearna DJ po z.

Svođenje Rikatijeve na Bernulijevu DJ:

Uvodimo smenu $y = y_1 + z \quad \Rightarrow \quad y' = y_1' + z'$

Zamenimo y i y' u polaznu jednačinu $y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$:

$$y_1' + z' = P(x)(y_1 + z)^2 + Q(x)(y_1 + z) + R(x)$$
$$y_1' + z' = (P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)) + 2P(x)y_1 z + P(x)z^2 + Q(x)z$$

Pošto je y_1 rešenje jednačine $\Rightarrow y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)$.

$$\begin{aligned} z' &= 2P(x)y_1 z + P(x)z^2 + Q(x)z \\ &= (2P(x)y_1 + Q(x))z + P(x)z^2 \end{aligned}$$

$z' - (2P(x)y_1 + Q(x))z = P(x)z^2 \rightarrow$ Ovo je Bernulijeva DJ po z, za $n = 2$.